DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES
- OPTION M -
(temps accordé : 4 heures)

Notations

On appellera E l'espace vectoriel complexe des fonctions continues sur le segment I = $[-\pi, +\pi]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ (complexes), $\mathcal{G}$ la famille des éléments de E, restrictions à I des fonctions sin (px) et cos (px) pour tout p de $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}$ respectivement.

$\mathcal{G}_n$ sera la sous-famille de $\mathcal{G}$ obtenue pour $1 \leq p \leq n$

H_n désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{G}_n$

H_0 est le sous-espace vectoriel des fonctions constantes sur I, et

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (H_n + H_0)$$

PARTIE I

I.1 - Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{G}$ (c'est-à-dire que tout élément de H est une combinaison linéaire finie d'éléments de $\mathcal{G}$).

I.2 - Montrer que l'application :

$$\begin{cases} E \times E \to \mathbb{C} \\ (f, g) \rightsquigarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \end{cases}$$

définit un produit scalaire hermitien sur E.

Dans la suite du problème, E sera muni de cette structure hermitienne, le produit hermitien étant noté (f|g)

I.3 - a) Calculer les intégrales suivantes, pour tous p et q éléments de $\mathbb{N}^*$:

$$C_{pq} = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(px) \cos(qx)\, dx$$

$$S_{pq} = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(px) \sin(qx)\, dx$$

$$R_{pq} = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(px) \cos(qx)\, dx$$

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\mathcal{G}_n$ est orthogonale, et que $\mathcal{G}$ l'est également. Ces familles sont-elles orthonormales ?

b) Quel est le sous-espace vectoriel de H formé des éléments orthogonaux à H_n, n fixé dans $\mathbb{N}^*$, et H_0 ?

c) Montrer que les familles $\mathcal{G}_n$ et $\mathcal{G}$ sont libres.

I.4 - Pour cette question, on se place dans H_n, $n \in \mathbb{N}^*$ fixé

a) Montrer que l'application d :

$$\begin{cases} H \to H \\ f \rightsquigarrow f' \text{ (dérivée de f)} \end{cases}$$

est définie et constitue un endomorphisme de H_n.

Ecrire la matrice M_n de d dans la base $\mathcal{G}_n$ et prouver que d est un automorphisme de H_n.

b) Calculer le polynôme caractéristique de M_n, ses valeurs propres et les vecteurs propres associés. En déduire que M_n se diagonalise dans une base orthogonale.

PARTIE II

Nous appellerons E' l'espace vectoriel des fonctions réelles et continues sur I muni du produit hermitien (donc euclidien) précédent. Dans la suite, on restera dans E' et H', H'_n, H'_0 remplaceront respectivement H, H_n et H_0.

II.1 - Soit f un élément de E' non nul.

Montrer qu'il existe deux réels $\in \mathbb{R}_+^*$ α et δ et $x_0 \in]-\pi, +\pi[$, tels que

* $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$

* $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad |f(x)| \geq \delta$

Dans toute la suite de cette partie, x_0, α et δ sont choisis de cette manière.

II.2 - Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose

$T_n(x) = (1 + \cos(x - x_0) - \cos\alpha)^n$

Montrer que $T_n \in H'$ et que

$\forall x \in]-\pi, x_0 - \alpha[\cup]x_0 + \alpha, \pi[, \quad |T_n(x)| \leq 1$

.../...

348

II 3 - Montrer qu'il existe deux réels $\beta > 0$ et $\gamma > 1$ tels que
$\forall x \in]x_0 - \beta, \ x_0 + \beta[$ alors $T_n(x) > \gamma^n$

II.4 - Si m est un majorant de $|f|$ sur I, montrer que l'on peut majorer
$\left| \int_{-\pi}^{x_0 - \alpha} |f(x)| \ T_n(x)\,dx \right|$ et $\left| \int_{x_0 + \alpha}^{+\pi} |f(x)| \ T_n(x)\,dx \right|$,
et en déduire qu'il existe un n_0 de $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$
$\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)| \ T_n(x)\,dx > 0$

II.5 - En déduire que le sous espace vectoriel de E' orthogonal à H' est réduit à {0}.

PARTIE III

Soit f un élément de E' non nul.
On note $S_k = (f(x) \mid \sin(kx))$ pour $k > 0$
et $C_k = (f(x) \mid \cos(kx))$ pour $k \geq 0$

On suppose dans la suite que les séries de termes généraux S_k et C_k sont absolument convergentes.

III.1 - On note pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de I :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} S_k \sin(kx) \quad \text{et}$$

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \cos(kx)$$

a) - Montrer que les suites $S_n(x)$ et $C_n(x)$ sont convergentes (on notera $S(x)$ et $C(x)$ leurs limites respectives)

b) - Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall p > n_0, \ \forall q > n_0, \ \forall x \in I, \ |S_p(x) - S_q(x)| < \varepsilon$
$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \ \forall p > n_1, \ \forall q > n_1, \ \forall x \in I, \ |C_p(x) - C_q(x)| < \varepsilon$

et en déduire que
$\forall n > n_0, \ \forall x \in I, \ |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon$
$\forall n > n_1, \ \forall x \in I, \ |C_n(x) - C(x)| \leq \varepsilon$

c) - Déduire des résultats précédents que les applications

$$S : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto S(x) \end{cases} \quad \text{et}$$

$$C : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto C(x) \end{cases}$$

sont continues (donc éléments de E')

III.2 - a) Calculer les limites pour $n \to +\infty$ des suites

$$U_n = \int_{-\pi}^{+\pi} |S(x) - S_n(x)|\,dx$$

$$V_n = \int_{-\pi}^{+\pi} |C(x) - C_n(x)|\,dx$$

b) Calculer les produits euclidiens suivants :
$(C(x) \mid \cos(kx))$ et $(S(x) \mid \cos(kx))$ pour $k \geq 0$ puis
$(C(x) \mid \sin(kx))$ et $(S(x) \mid \sin(kx))$ pour $k > 0$

c) En déduire que la fonction $f - (C + S)$ est orthogonale à H'_n, pour tout n de $\mathbb{N}^*$. Trouver une constante a_0 telle que $f - (C + S + a_0)$ soit orthogonale à H'. Conclure.

III.3 - En appliquant les résultats précédents à l'élément f de E' tel que

$$\frac{df}{dx} = -x \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = 0$$

Calculer (en le justifiant) la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

III.4 - Calculer par une méthode semblable la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$